Einseitiger Test

Einseitiger Hypothesentest

Mit Hilfe von Hypothesentests kann man auf Grundlage einer Stichprobe entscheiden, ob eine vermutete Wahrscheinlichkeit statistisch gesehen gerechtfertigt ist oder eventuell korrigiert werden sollte. Die Vermutung wird **Nullhypothese** genannt und gegen die **Alternative** getestet. Bei einseitigen Tests haben die Hypothesen folgende Formen:

- Linksseitiger Test: Nullhypothese: $H_0: p \geq p_1$ Alternative: $H_1: p < p_1$
- Rechtsseitiger Test: Nullhypothese: $H_0: p \leq p_1$ Alternative: $H_1: p > p_1$

Bei linksseitigen Tests wird also geprüft, ob die Wahrscheinlichkeit p tatsächlich mindestens p_1 beträgt. Bei rechtsseitigen Tests wird dagegen geprüft, ob die Wahrscheinlichkeit tatsächlich höchstens p_1 beträgt.

Vorgehen

Bei der Durchführung eines Signifikanztests wird allgemein folgendermaßen vorgegangen:

- Formulieren der Hypothesen und Wahl des Signifikanzniveaus α
- Aufstellen eines Ablehnungsbereichs $\overline{A}$
- Betrachten einer Stichprobe
- Entscheidungsregel formulieren

Das Signifikanzniveau wird auch Irrtumswahrscheinlichkeit genannt. Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die Hypothese fälschlicherweise abzulehnen. Dies ist in den Aufgabenstellungen meistens vorgegeben. Der **Ablehnungsbereich** $\overline{A}$ und der **Annahmebereich** A haben folgende Form:

- Linksseitiger Test: $\overline{A} = [0; k-1]$ und $A = [k; n]$
- Rechtsseitiger Test: $\overline{A} = [k+1; n]$ und $A = [0; k]$

Liegt die Anzahl der Treffer der Stichprobe innerhalb dieses Ablehnungsbereichs, so wird die Hypothese auf dem Signifikanzniveau α verworfen, andernfalls liegt sie innerhalb des Annahmebereichs und wird somit als bestätigt angesehen. Die Intervallgrenze k wird beim linksseitigen Test **linke Grenze** und beim rechtsseitigen Test **rechte Grenze** genannt.

Berechnen der Grenze

Da das Signifikanzniveau die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass eine Stichprobe innerhalb des Ablehnungsbereichs liegt, obwohl die Nullhypothese gilt, muss bei einem linksseitigen Test folgende Gleichung gelten, wobei X die betrachtete Zufallsvariable mit einer entsprechenden Verteilung ist.

$$P(X \leq k-1) \approx \alpha$$

Mit Hilfe der Verteilung von X kannst du das k aus dieser Gleichung berechnen.

Bei einem rechtsseitigen Test gilt entsprechend:

$$\boxed{P(X \geq k+1) \approx \alpha}$$

Beispiel

Vorgegeben sind: $H_0: p \leq 0,5$, $\alpha = 5\,\%$ und der Stichprobenumfang $n = 20$, wobei die betrachtete Größe als binomialverteilt angenommen werden soll.

Anhand der Hypothese H_0 kannst du erkennen, dass hier ein rechtsseitiger Test durchgeführt wird. Wir suchen also nun den Ablehnungsbereich $\overline{A} = [k+1; n] = [k+1; 20]$. Es soll also folgende Gleichung erfüllt sein:

$P(X \geq k+1) \approx 0,05 \;\Leftrightarrow P(X \leq k) \approx 0,95$

Mit Hilfe der Tabelle für die kummulierte Binomialverteilung erhalten wir nun: $P(X \leq 13) \approx 0,94 \;\Rightarrow k = 13$ $\Rightarrow \overline{A} = [14; 20]$

Sind in der Stichprobe mindestens 14 Treffer enthalten, so kann die Hypothese $H_0: p \leq 0,5$ auf dem Signifikanzniveau $5\,\%$ verworfen werden. Bei weniger als 14 Treffern kann diese Hypothese angenommen werden.

Fehler

Bei der Durchführung von Signifikanztests können zwei Fehler auftreten:

- **Fehler 1. Art**: Die Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl diese in Wahrheit zutrifft.
- **Fehler 2. Art**: Die Nullhypothese wird angenommen, obwohl tatsächlich die Alternative gilt.

Wahrscheinlichkeit für die Fehler

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art entspricht dem Signifikanzniveau. Kennst du dieses nicht, sondern nur den Ablehnungsbereich, so entspricht die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art der Wahrscheinlichkeit dafür, dass X im Ablehnungsbereich liegt $P(X \in \overline{A}) = P\,(\text{Fehler 1. Art}) = \alpha$, wobei die Verteilung von X entsprechend der Nullhypothese angenommen wird.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kannst du nicht einfach berechnen. Dazu muss dir in der Aufgabenstellung eine Alternative Wahrscheinlichkeit p_0 gegeben sein. Das bedeutet, du berechnest die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X im Annahmebereich liegt, wenn in Wahrheit die Wahrscheinlichkeit p_0 gilt: $P\,(\text{Fehler 2. Art}) = P(X \in A)$. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit eines Treffers als p_0 angenommen.

Beispiel

Gegeben sind: $H_0: p \leq 0,5$, $n = 20$, $A = [0; 13]$, $p_0 = 0,7$, wobei X als binomialverteilt angenommen werden kann. Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn eigentlich p_0 gilt mit Hilfe der Tabelle für die kummulierte Binomialverteilung:

$P_{0,7}(X \in A) = P_{0,7}(X \leq 13)$ \approx 0,392=39,2 \,\%$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ergibt sich hier, indem wir $p = 0,5$ annehmen:

$P_{0,5}(X \in \overline{A}) = P_{0,5}(X \geq 14) = 1 - P_{0,5}(X \leq 13) \approx 1 - 0,9423 = 0,0577 = 5,77\,\%$